

Příspěvky ke globální aproximaci tíhových dat

Josef Sebera

Fakulta stavební ČVUT & Astronomický ústav AV ČR

Seminář VÚGTK na Pecném, Ondřejov

13. 12. 2011

1 Úvod

- Globální aproximace
- Rozdělení tématu (2 v 1)

2 Optimalizace výpočtu ALF 2. druhu

- Elipsoidální reprezentace
- Výpočet ALF 2. druhu a Jekeliho renormalizace
- Hypergeometrická funkce a její optimalizace
- Numerické experimenty
- Konverze harmonických parametrů (HP)
- EGM2008
- Shrnutí

3 Lineární model pro MNČ SHA

- Obecný model SHA
- Hotineho rovnice
- Lineární model s Hotineho rovnicemi
- Numerické experimenty
- Shrnutí

4 Doporučená literatura

1 Úvod

- Globální aproximace
- Rozdělení tématu (2 v 1)

2 Optimalizace výpočtu ALF 2. druhu

- Elipsoidální reprezentace
- Výpočet ALF 2. druhu a Jekeliho renormalizace
- Hypergeometrická funkce a její optimalizace
- Numerické experimenty
- Konverze harmonických parametrů (HP)
- EGM2008
- Shrnutí

3 Lineární model pro MNČ SHA

- Obecný model SHA
- Hotineho rovnice
- Lineární model s Hotineho rovnicemi
- Numerické experimenty
- Shrnutí

4 Doporučená literatura

1 Úvod

- Globální aproximace
- Rozdělení tématu (2 v 1)

2 Optimalizace výpočtu ALF 2. druhu

- Elipsoidální reprezentace
- Výpočet ALF 2. druhu a Jekeliho renormalizace
- Hypergeometrická funkce a její optimalizace
- Numerické experimenty
- Konverze harmonických parametrů (HP)
- EGM2008
- Shrnutí

3 Lineární model pro MNČ SHA

- Obecný model SHA
- Hotineho rovnice
- Lineární model s Hotineho rovnicemi
- Numerické experimenty
- Shrnutí

4 Doporučená literatura

1 Úvod

- Globální aproximace
- Rozdělení tématu (2 v 1)

2 Optimalizace výpočtu ALF 2. druhu

- Elipsoidální reprezentace
- Výpočet ALF 2. druhu a Jekeliho renormalizace
- Hypergeometrická funkce a její optimalizace
- Numerické experimenty
- Konverze harmonických parametrů (HP)
- EGM2008
- Shrnutí

3 Lineární model pro MNČ SHA

- Obecný model SHA
- Hotineho rovnice
- Lineární model s Hotineho rovnicemi
- Numerické experimenty
- Shrnutí

4 Doporučená literatura

Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0 \Rightarrow$ sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic $\Rightarrow$ MNČ řešení
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém $n_{max} \leq 360$

Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance) $\Rightarrow$ exaktní kvadratury, FFT
- Předpoklad LNOFe $\Rightarrow$ bez elips. korekcí
- Předpoklad LNOFs $\Rightarrow$ možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)
- Možno vyšší n_{max} , např. EGM2008 s 2160(2190).

Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0 \Rightarrow$ sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic $\Rightarrow$ MNČ řešení
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém $n_{max} \leq 360$

Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance) $\Rightarrow$ exaktní kvadratury, FFT
- Předpoklad LNOFe $\Rightarrow$ bez elips. korekcí
- Předpoklad LNOFs $\Rightarrow$ možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)
- Možno vyšší n_{max} , např. EGM2008 s 2160(2190).

Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0 \Rightarrow$ sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic $\Rightarrow$ MNČ řešení
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém $n_{max} \leq 360$

Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance) $\Rightarrow$ exaktní kvadratury, FFT
- Předpoklad LNOFe $\Rightarrow$ bez elips. korekcí
- Předpoklad LNOFs $\Rightarrow$ možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)
- Možno vyšší n_{max} , např. EGM2008 s 2160(2190).

Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0 \Rightarrow$ sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic $\Rightarrow$ MNČ řešení
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém $n_{max} \leq 360$

Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance) $\Rightarrow$ exaktní kvadratury, FFT
- Předpoklad LNOFe $\Rightarrow$ bez elips. korekcí
- Předpoklad LNOFs $\Rightarrow$ možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)
- Možno vyšší n_{max} , např. EGM2008 s 2160(2190).

Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0 \Rightarrow$ sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic $\Rightarrow$ MNČ řešení
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém $n_{max} \leq 360$

Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance) $\Rightarrow$ exaktní kvadratury, FFT
- Předpoklad LNOFe $\Rightarrow$ bez elips. korekcí
- Předpoklad LNOFs $\Rightarrow$ možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)
- Možno vyšší n_{max} , např. EGM2008 s 2160(2190).

Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0 \Rightarrow$ sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic $\Rightarrow$ **MNČ řešení**
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém $n_{max} \leq 360$

Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance) $\Rightarrow$ **exaktní kvadratury, FFT**
- Předpoklad LNOFe $\Rightarrow$ **bez elips. korekcí**
- Předpoklad LNOFs $\Rightarrow$ **možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)**
- Možno vyšší n_{max} , např. EGM2008 s 2160(2190).

Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0 \Rightarrow$ sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic $\Rightarrow$ **MNČ řešení**
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém $n_{max} \leq 360$

Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance) $\Rightarrow$ **exaktní kvadratury, FFT**
- Předpoklad LNOFe $\Rightarrow$ **bez elips. korekcí**
- Předpoklad LNOFs $\Rightarrow$ **možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)**
- Možno vyšší n_{max} , např. EGM2008 s 2160(2190).

Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0 \Rightarrow$ sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic $\Rightarrow$ **MNČ řešení**
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém $n_{max} \leq 360$

Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance) $\Rightarrow$ **exaktní kvadratury, FFT**
- Předpoklad LNOFe $\Rightarrow$ **bez elips. korekcí**
- Předpoklad LNOFs $\Rightarrow$ **možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)**
- Možno vyšší n_{max} , např. EGM2008 s 2160(2190).

Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0 \Rightarrow$ sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic $\Rightarrow$ **MNČ řešení**
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém $n_{max} \leq 360$

Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance) $\Rightarrow$ **exaktní kvadratury, FFT**
- Předpoklad LNOFe $\Rightarrow$ **bez elips. korekcí**
- Předpoklad LNOFs $\Rightarrow$ **možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)**
- Možno vyšší n_{max} , např. EGM2008 s 2160(2190).

Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0 \Rightarrow$ sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic $\Rightarrow$ **MNČ řešení**
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém $n_{max} \leq 360$

Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance) $\Rightarrow$ **exaktní kvadratury, FFT**
- Předpoklad LNOFe $\Rightarrow$ **bez elips. korekcí**
- Předpoklad LNOFs $\Rightarrow$ **možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)**
- Možno vyšší n_{max} , např. EGM2008 s 2160(2190).

Co myslíme globální aproximací gravitačního pole?

- Jde o zpracování globálně distribuovaných tíhových dat na povrchu Země pomocí vhodného funkčního aparátu
- Jako funční aparát zde budeme uvažovat deriváty Laplaceovy rovnice $\Delta V = 0 \Rightarrow$ sférické a elipsoidální harmonické funkce
- Podle přístupu k řešení zde rozdělíme na přístup obecné a přístup s využitím nějakého zjednodušení (symetrie)

Obecný přístup (ne-grid data)

- Snaží se do problému zavádět minimum zjednodušení např. o geometrickém rozložení dat, referenční soustavě dat, ...
- Přístup obvykle vede na velké soustavy lin. rovnic $\Rightarrow$ **MNČ řešení**
- Např. družicové modely ITG03, ITG10, EIGEN6s o nízkém $n_{max} \leq 360$

Přístup symetrie (grid data)

- Předpoklad rovnoměrného rozložení dat (ekvidistance) $\Rightarrow$ **exaktní kvadratury, FFT**
- Předpoklad LNOFe $\Rightarrow$ **bez elips. korekcí**
- Předpoklad LNOFs $\Rightarrow$ **možno použít standardní rovnice (Koop, Rummel, Petrovskaya, ...)**
- Možno vyšší n_{max} , např. EGM2008 s 2160(2190).

Náplň přednášky

Pro symetrie: výpočet elipsoidálních funkcí pro EHA

- Elipsoidální reprezentace
- Cíl: **optimalizace výpočtu speciálních funkcí** (rychlost, přesnost, jednoduchost algoritmu) pro $N \leq 3000$ jako např. EGM2008
- Namísto Legendreových funkcí 2. druhu použijeme Jekeliho renormalizaci

Pro obecné řešení: funkcionální model SHA a Hotineho rovnice

- Sférická reprezentace
- Cíl: **návrh lineárního modelu** pro výpočet $\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$ do $N \sim 250$ odpovídající např. modelů z GOCE, GRACE
- Různá data, obecně distribuovaná a různě orientovaná
- Namísto standardních rovnic využijeme Hotineho rovnice

Náplň přednášky

Pro symetrie: výpočet elipsoidálních funkcí pro EHA

- Elipsoidální reprezentace
- Cíl: **optimalizace výpočtu speciálních funkcí** (rychlost, přesnost, jednoduchost algoritmu) pro $N \leq 3000$ jako např. EGM2008
- Namísto Legendreových funkcí 2. druhu použijeme Jekeliho renormalizaci

Pro obecné řešení: funkcionální model SHA a Hotineho rovnice

- Sférická reprezentace
- Cíl: **návrh lineárního modelu** pro výpočet $\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$ do $N \sim 250$ odpovídající např. modelů z GOCE, GRACE
- Různá data, obecně distribuovaná a různě orientovaná
- Namísto standardních rovnic využijeme Hotineho rovnice

Náplň přednášky

Pro symetrie: výpočet elipsoidálních funkcí pro EHA

- Elipsoidální reprezentace
- Cíl: **optimalizace výpočtu speciálních funkcí** (rychlost, přesnost, jednoduchost algoritmu) pro $N \leq 3000$ jako např. EGM2008
- Namísto Legendreových funkcí 2. druhu použijeme Jekeliho renormalizaci

Pro obecné řešení: funkcionální model SHA a Hotineho rovnice

- Sférická reprezentace
- Cíl: **návrh lineárního modelu** pro výpočet $\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$ do $N \sim 250$ odpovídající např. modelů z GOCE, GRACE
- Různá data, obecně distribuovaná a různě orientovaná
- Namísto standardních rovnic využijeme Hotineho rovnice

Náplň přednášky

Pro symetrie: výpočet elipsoidálních funkcí pro EHA

- Elipsoidální reprezentace
- Cíl: **optimalizace výpočtu speciálních funkcí** (rychlost, přesnost, jednoduchost algoritmu) pro $N \leq 3000$ jako např. EGM2008
- Namísto Legendreových funkcí 2. druhu použijeme Jekeliho renormalizaci

Pro obecné řešení: funkcionální model SHA a Hotineho rovnice

- Sférická reprezentace
- Cíl: **návrh lineárního modelu** pro výpočet $\bar{C}_{n,m}, \bar{S}_{n,m}$ do $N \sim 250$ odpovídající např. modelů z GOCE, GRACE
- Různá data, obecně distribuovaná a různě orientovaná
- Namísto standardních rovnic využijeme Hotineho rovnice

A) Elipsoidální reprezentace - optimalizace výpočtu Legendreových funkcí druhého druhu v rámcí Jekeliho renormalizace

Elipsoidální reprezentace V

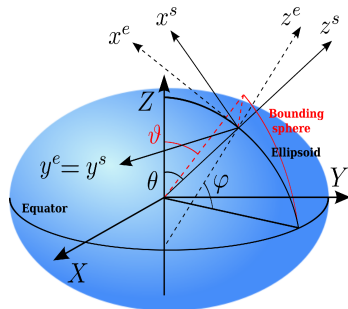
Řešíme $\Delta V = 0$ v elip. souřadnicích $\{u, \vartheta, \lambda\}$, v níž je tato rovnice separabilní. Výsledkem je:

$$V = \frac{GM}{a} \sum_{n,m} \frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})} (\bar{C}_{nm}^e \cos m\lambda + \bar{S}_{nm}^e \sin m\lambda) \bar{P}_{nm}(\cos \vartheta)$$

kde $Q_{nm}(\frac{u}{E})$ jsou ALF druhého druhu. V praxi ovšem „nesbíráme“ V , ale obvykle některé jeho derivace:

$$\begin{aligned} V_x^e &= -\frac{1}{L} V_\vartheta \\ V_y^e &= -\frac{1}{v \sin \vartheta} V_\lambda \\ V_z^e &= \frac{v}{L} V_u \\ V_{xx}^e &= \frac{uv^2}{L^4} V_u + \frac{1}{L^2} V_{\vartheta\vartheta} + \frac{E^2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{L^4} V_\vartheta \\ V_{yy}^e &= \frac{u}{L^2} V_u + \frac{1}{v^2 \sin^2 \vartheta} V_{\lambda\lambda} + \frac{\cot \vartheta}{L^2} V_\vartheta \\ V_{zz}^e &= \frac{v^2}{L^2} V_{uu} - \frac{uE^2 \sin^2 \vartheta}{L^4} V_u - \frac{E^2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{L^4} V_\vartheta \\ V_{xy}^e &= \frac{1}{vL \sin \vartheta} V_{\vartheta\lambda} - \frac{\cot \vartheta}{vL \sin \vartheta} V_\lambda \\ V_{xz}^e &= \frac{uv}{L^4} V_\vartheta - \frac{v}{L^2} V_{u\vartheta} - \frac{vE^2 \cos \vartheta \sin \vartheta}{L^4} V_u \\ V_{yz}^e &= \frac{u}{Lv^2 \sin \vartheta} V_\lambda + \frac{1}{L \sin \vartheta} V_{u\lambda} \end{aligned}$$

kde $v = \sqrt{u^2 + E^2}$ and $L = \sqrt{u^2 + E^2 \cos^2 \vartheta}$



EFF - rovníková soustava $\{X, Y, Z\}$

LNOFs - sférická, lokální, severně orientovaná soustava $\{x_s, y_s, z_s\}$

LNOFe - elipsoidická, lokální, severně orientovaná soustava $\{x_e, y_e, z_e\}$

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
 - Počítáme celé hodnoty $Q_{n,m}$
 - Počítáme zlomky $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
 - Renormalizujeme $Q_{n,m}$ a pak teprve počítáme (např. Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR: $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$, což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst. $z = i \frac{u}{E}$):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \frac{\left(\frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \left(1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
 - Počítáme celé hodnoty $Q_{n,m}$
 - Počítáme zlomky $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
 - Renormalizujeme $Q_{n,m}$ a pak teprve počítáme (např. Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR: $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$, což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst. $z = i \frac{u}{E}$):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \frac{\left(\frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \left(1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- **Hypergeometrická formulace**
 - Počítáme celé hodnoty $Q_{n,m}$
 - Počítáme zlomky $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
 - Renormalizujeme $Q_{n,m}$ a pak teprve počítáme (např. Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR: $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$, což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst. $z = i \frac{u}{E}$):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \frac{\left(\frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \left(1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
 - Počítáme celé hodnoty $Q_{n,m}$
 - Počítáme zlomky $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
 - Renormalizujeme $Q_{n,m}$ a pak teprve počítáme (např. Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR: $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$, což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst. $z = i \frac{u}{E}$):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \frac{\left(\frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \left(1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
 - Počítáme celé hodnoty $Q_{n,m}$
 - Počítáme zlomky $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
 - Renormalizujeme $Q_{n,m}$ a pak teprve počítáme (např. Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR: $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$, což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst. $z = i \frac{u}{E}$):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \frac{\left(\frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \left(1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
 - Počítáme celé hodnoty $Q_{n,m}$
 - Počítáme zlomky $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
 - Renormalizujeme $Q_{n,m}$ a pak teprve počítáme (např. Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR: $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$, což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst. $z = i \frac{u}{E}$):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \frac{\left(\frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \left(1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
 - Počítáme celé hodnoty $Q_{n,m}$
 - Počítáme zlomky $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
 - Renormalizujeme $Q_{n,m}$ a pak teprve počítáme (např. Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR: $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$, což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst. $z = i \frac{u}{E}$):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \frac{\left(\frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \left(1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
 - Počítáme celé hodnoty $Q_{n,m}$
 - Počítáme zlomky $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
 - Renormalizujeme $Q_{n,m}$ a pak teprve počítáme (např. Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR: $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$, což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst. $z = i \frac{u}{E}$):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \frac{\left(\frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \left(1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
 - Počítáme celé hodnoty $Q_{n,m}$
 - Počítáme zlomky $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
 - Renormalizujeme $Q_{n,m}$ a pak teprve počítáme (např. Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR: $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$, což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst. $z = i \frac{u}{E}$):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \frac{\left(\frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \left(1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

Výpočet přidružených Legendreových funkcí 2. druhu

- Rekurentní vzorce
- Zjednodušení - „perturbative approach“
- Hypergeometrická formulace
 - Počítáme celé hodnoty $Q_{n,m}$
 - Počítáme zlomky $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$
 - Renormalizujeme $Q_{n,m}$ a pak teprve počítáme (např. Jekeliho renormalizace)

Jekeliho funkce byla původně určena pro konverze mezi sfér. a elipsoidálními Stokesovými parametry, zavádí se v LDR: $(u^2 + E^2) \bar{Q}_{n,m}^2 + 2u\bar{Q}_{n,m}^1 - \left[n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{Q}_{n,m}^0 = 0$, což ovšem můžeme vynásobit libovolnou funkcí (subst. $z = i \frac{u}{E}$):

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \frac{\left(\frac{R}{E} \right)^{n+1} i^{n+1} (2n+1)!}{2^n n!} \sqrt{\frac{\epsilon_m}{(2n+1)(n-m)!(n+m)!}} \bar{Q}_{n,m}(z),$$

$$\bar{Q}_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{2^n n! (n+m)!}{(2n+1)!} \frac{(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}}}{z^{n+m+1}} \underbrace{{}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2} \right)}_{\text{Gauss. hyper. funkce}} \underbrace{\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{\epsilon_m (n+m)!}}}_{\text{Norma}},$$

$$\bar{S}_{n,m}^0 \left(\frac{u}{E} \right) = \left(1 + \frac{E^2}{u^2} \right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{R}{u} \right)^{n+1} {}_2F_1 \left(\frac{n+m+2}{2}, \frac{n+m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2} \right).$$

Gaussova hypergeometrická funkce

V předcházející rovnici je použita hypergeometrická funkce ${}_2F_1$, která je definována

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{\delta^k}{k!},$$

kde $(x)_k = \frac{(x+k-1)!}{(x-1)!}$. Výpočetní optimalizace ${}_2F_1$ spočívá v zavedení povolené transformace, která by pomohla tuto nekonečnou řadu dovést rychleji ke (přijatelné) konvergenci $\Rightarrow$ transformace v podstatě mění poměry ve zlomku (např. zvýšení $(\gamma)_k$ urychlí konvergenci). Např. transformace

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1 - \delta)^{\gamma - \alpha - \beta} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, \delta),$$

poskytuje z původní Jekeliho funkce $\bar{S}_{n,m}$

$$* \bar{S}_{n,m}^0\left(\frac{u}{E}\right) = \left(1 + \frac{E^2}{u^2}\right)^{-\frac{m}{2}} \left(\frac{R}{u}\right)^{n+1} {}_2F_1\left(\frac{n-m+2}{2}, \frac{n-m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2}\right),$$

kde jsme výrazně snížili α, β .

$\Rightarrow$ Rychlejší výpočty, snížení vlivu zaokrouhlování

$\Rightarrow$ Derivací původní nebo optimalizované funkce $\bar{S}_{n,m}$ podle u získáme $\Rightarrow \frac{\partial \bar{S}_{n,m}}{\partial u}$,
 $\frac{\partial^2 \bar{S}_{n,m}}{\partial u^2} \Rightarrow$ výpočet $V_i, V_{i,j}$.

Gaussova hypergeometrická funkce

V předcházející rovnici je použita hypergeometrická funkce ${}_2F_1$, která je definována

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{\delta^k}{k!},$$

kde $(x)_k = \frac{(x+k-1)!}{(x-1)!}$. Výpočetní optimalizace ${}_2F_1$ spočívá v zavedení povolené transformace, která by pomohla tuto nekonečnou řadu dovést rychleji ke (přijatelné) konvergenci $\Rightarrow$ transformace v podstatě mění poměry ve zlomku (např. zvýšení $(\gamma)_k$ urychlí konvergenci). Např. transformace

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1 - \delta)^{\gamma - \alpha - \beta} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, \delta),$$

poskytuje z původní Jekeliho funkce $\bar{S}_{n,m}$

$$* \bar{S}_{n,m}^0\left(\frac{u}{E}\right) = \left(1 + \frac{E^2}{u^2}\right)^{-\frac{m}{2}} \left(\frac{R}{u}\right)^{n+1} {}_2F_1\left(\frac{n-m+2}{2}, \frac{n-m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2}\right),$$

kde jsme výrazně snížili α, β .

$\Rightarrow$ Rychlejší výpočty, snížení vlivu zaokrouhlování

$\Rightarrow$ Derivací původní nebo optimalizované funkce $\bar{S}_{n,m}$ podle u získáme $\Rightarrow \frac{\partial \bar{S}_{n,m}}{\partial u}$,
 $\frac{\partial^2 \bar{S}_{n,m}}{\partial u^2} \Rightarrow$ výpočet $V_i, V_{i,j}$.

Gaussova hypergeometrická funkce

V předcházející rovnici je použita hypergeometrická funkce ${}_2F_1$, která je definována

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{\delta^k}{k!},$$

kde $(x)_k = \frac{(x+k-1)!}{(x-1)!}$. Výpočetní optimalizace ${}_2F_1$ spočívá v zavedení povolené transformace, která by pomohla tuto nekonečnou řadu dovést rychleji ke (přijatelné) konvergenci $\Rightarrow$ transformace v podstatě mění poměry ve zlomku (např. zvýšení $(\gamma)_k$ urychlí konvergenci). Např. transformace

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1 - \delta)^{\gamma - \alpha - \beta} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, \delta),$$

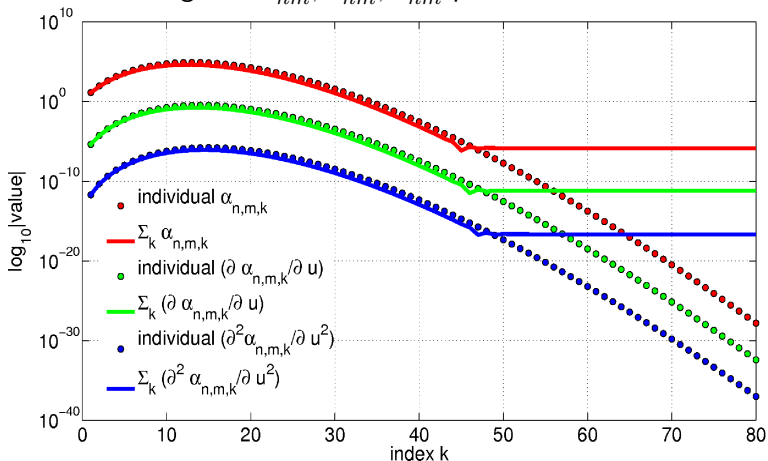
poskytuje z původní Jekeliho funkce $\bar{S}_{n,m}$

$$* \bar{S}_{n,m}^0\left(\frac{u}{E}\right) = \left(1 + \frac{E^2}{u^2}\right)^{-\frac{m}{2}} \left(\frac{R}{u}\right)^{n+1} {}_2F_1\left(\frac{n-m+2}{2}, \frac{n-m+1}{2}, n + \frac{3}{2}, -\frac{E^2}{u^2}\right),$$

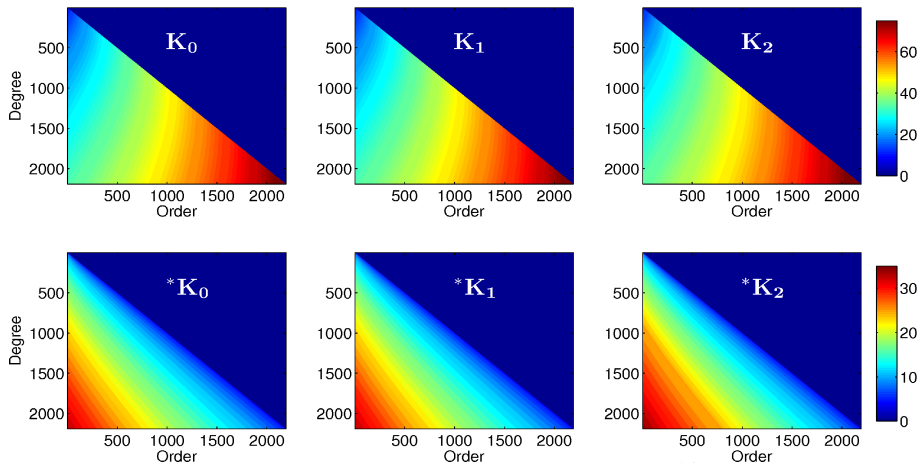
kde jsme výrazně snížili α, β .

$\Rightarrow$ Rychlejší výpočty, snížení vlivu zaokrouhlování

$\Rightarrow$ Derivací původní nebo optimalizované funkce $\bar{S}_{n,m}$ podle u získáme $\Rightarrow \frac{\partial \bar{S}_{n,m}}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 \bar{S}_{n,m}}{\partial u^2} \Rightarrow$ výpočet $V_i, V_{i,j}$.

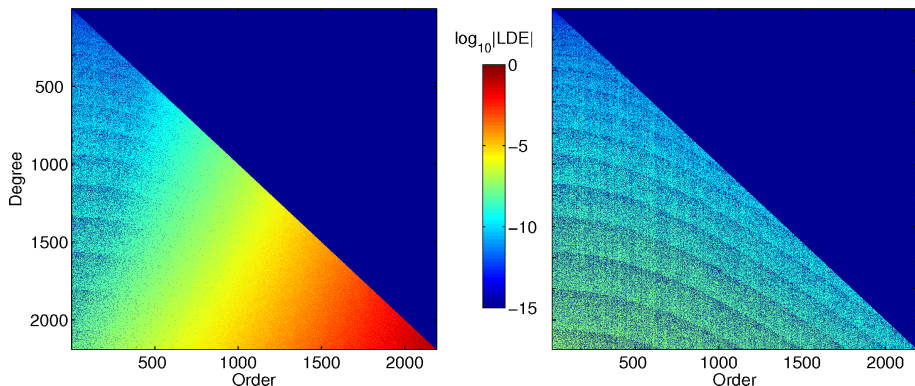
Konvergence $S_{nm}^1, S_{nm}^2, S_{nm}^3$ pro $n = m = 2000$ 

- Pro $|\delta| < 1$ je hypergeometrická řada ${}_2F_1$ konvergentní
- Z obrázku vidno, že není obecně monotónní (což závisí také na n, m).



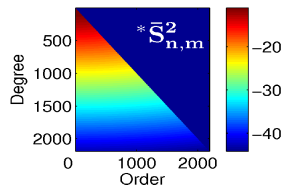
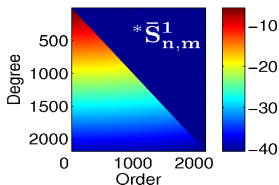
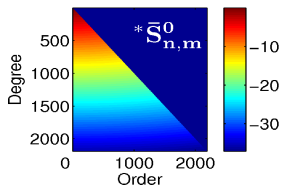
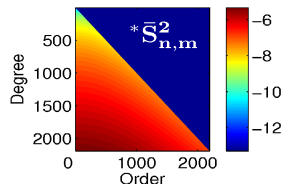
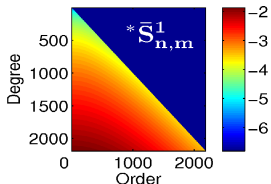
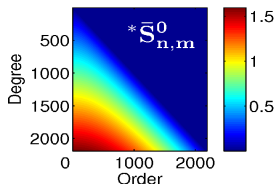
Počet členů pro konvergenci při relativní přesnosti 10^{-16} . Původní (horní řádek) vs. optimalizované (dolní řádek)

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \sum_{k=0}^K \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k} \frac{\delta^k}{k!},$$



Dosazení do Legendreovy diferenciální rovnice, vlevo původní vs. vpravo optimalizované

$$(u^2 + E^2) \bar{S}_{n,m}^2 + 2u\bar{S}_{n,m}^1 - \left[n(n+1) - \frac{m^2 E^2}{u^2 + E^2} \right] \bar{S}_{n,m}^0 = 0$$



Jekeliho funkce na povrchu elipsoidu (nahore) a $h = 250$ km (dole) pro

$$n_{max} = 2190$$

⇒ Při tomto n_{max} žádný problém s podtečením/nadtečením

⇒ Ve výškách GOCE jsou funkce téměř závislé jen na n

Ověření konceptu - výpočet totožných funkcionalů s elipsoidálními a sférickými Stokesovými parametry

	T	$ \nabla T $	T_{xx}^e	T_{yy}^e	T_{zz}^e	T_{xy}^e	T_{xz}^e	T_{yz}^e
Max	15.9 (15.9)	15.9 (14.7)	16.0 (14.6)	15.9 (12.9)	15.9 (13.2)	16.0 (13.9)	15.9 (14.6)	16.0 (13.7)
Min	14.0 (11.5)	11.9 (8.3)	8.2 (5.8)	8.6 (4.4)	8.3 (4.6)	9.0 (5.4)	8.2 (5.1)	8.7 (5.0)
RMS	14.9 (12.8)	13.8 (10.4)	12.7 (10.3)	12.8 (9.9)	12.8 (9.2)	12.8 (9.5)	12.7 (9.8)	12.8 (9.0)

Počet shodných cifer mezi SHS($n_{max} = 2190$) and EHS ($n_{max} = 2190 + 40$) ve střední Evropě ($\varphi \in \langle 44, 55 \rangle$, $\lambda \in \langle 5, 23 \rangle$ na gridu 5×5 min.). Tensor T_{ij} byl nejdříve rotován do LNOFe a pak porovnán. Počet shodných cifer je pro dvě čísla P_1, P_2 dán jako $\log_{10} \left(\frac{|P_1|}{|P_1 - P_2|} \right)$. V závorkách jsou výsledky pro původní (neoptimalizované) Jekeliho funkce.

Hotine-Jekeliho konverze sférických HP a elipsoidálních HP

- Umožňuje převést elipsoidální harmonické parametry na sférické a naopak
- **Konverze nezachovává maximální stupeň rozvoje**
- Parametry vlevo jsou totiž lineární kombinace parametrů vpravo
- Maximální stupeň se musí empiricky volit tak, aby obsah signálu v obou sadách parametrů zůstal totožný
- např. EGM2008 byl z původních "elipsoidálních" 2160 rozšířen ve stupni na "sférický" rozvoj 2190

Předpis

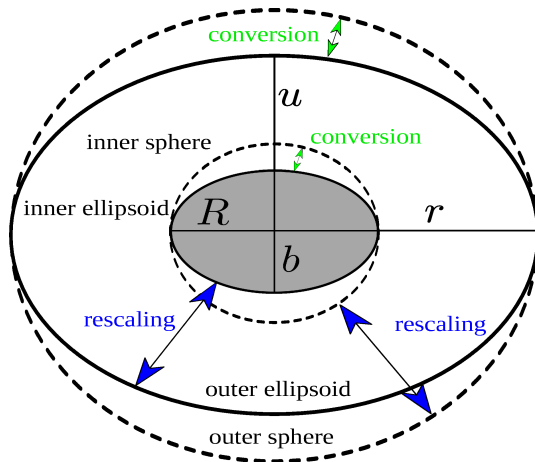
$$v_{n,m}^s|_R = \sum_{p=0}^w \frac{\Lambda_{n,m,p} \left(\frac{E}{R} \right)}{* \bar{S}_{n-2p,m} \left(\frac{b}{E} \right)} v_{n,m}^e|_b$$

kde w je celočíselná část čísla $\frac{n-m}{2}$ a funkce $\Lambda_{n,m,p} \left(\frac{E}{R} \right)$ je definována

$$\Lambda_{nmp} = \frac{(-1)^p (n-p)!(2n-4p+1)!}{p!(n-2p)!(2n-2p+1)!} \left(\frac{E}{R} \right)^{2p} \times \sqrt{\frac{(2n-4p+1)(n-m)!(n+m)!}{(2n+1)(n-2p-m)!(n-2p+m)!}}$$

K významu Hotine-Jekeliho konverze harmonických parametrů

(rescaling: $(\frac{R}{r})^{n+x}$ nebo $\frac{Q_{nm}(\frac{u}{E})}{Q_{nm}(\frac{b}{E})}$ nebo $\frac{S_{nm}(\frac{u}{E})}{S_{nm}(\frac{b}{E})} \dots$)



Byla harmonická analýza u EGM2008 vskutku plně elipsoidální?

- Nevíme, protože žádná referenční příručka (jako tomu bylo u EGM96) nebyla dosud publikována.
- Z pracovní publikace (Holmes a Pavlis) můžeme vyčíst, že zprostředkující rovnice byla vázána na Δg na elipsoidu pomocí harmonické funkce $r_e \Delta g_e$:

$$r_e \Delta g_e(r_e, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{\Delta \sigma} \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^N (n-1) \left(\frac{a}{r_e} \right)^n \sum_{m=-n}^n CS_{nm}^e \bar{I}Y_{nm}$$

- kde $CS_{nm}^e = \{\bar{C}_{nm}^e, \bar{S}_{nm}^e\}$ a $\bar{I}Y_{nm}$ jsou integrály (střední hodnoty) sférických funkcí vzhledem ke geografickému gridu.
- $\Rightarrow$ Tato rovnice pracuje v elipsoidálních souřadnicích $(r_e, \vartheta, \lambda)$
- $\Rightarrow$ Má však strukturu tíhové anomálie ve sférické aproximaci!!!
- $\Rightarrow$ Na elipsoidální data se tak aplikuje forma sférické obs. rovnice
- $\Rightarrow$ Vyřeší patrně problém s geometrií jak (Holmes a Pavlis) numericky ověřují
- $\Rightarrow$ Jde tedy spíše o jakýsi kompromis mezi sférickou a elipsoidální reprezentací

Byla harmonická analýza u EGM2008 vskutku plně elipsoidální?

- Nevíme, protože žádná referenční příručka (jako tomu bylo u EGM96) nebyla dosud publikována.
- Z pracovní publikace (Holmes a Pavlis) můžeme vyčíst, že zprostředkující rovnice byla vázána na Δg na elipsoidu pomocí harmonické funkce $r_e \Delta g_e$:

$$r_e \Delta g_e(r_e, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{\Delta \sigma} \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^N (n-1) \left(\frac{a}{r_e} \right)^n \sum_{m=-n}^n CS_{nm}^e \bar{I}Y_{nm}$$

- kde $CS_{nm}^e = \{\bar{C}_{nm}^e, \bar{S}_{nm}^e\}$ a $\bar{I}Y_{nm}$ jsou integrály (střední hodnoty) sférických funkcí vzhledem ke geografickému gridu.
- $\Rightarrow$ Tato rovnice pracuje v elipsoidálních souřadnicích $(r_e, \vartheta, \lambda)$
- $\Rightarrow$ Má však strukturu tíhové anomálie ve sférické aproximaci!!!
- $\Rightarrow$ Na elipsoidální data se tak aplikuje forma sférické obs. rovnice
- $\Rightarrow$ Vyřeší patrně problém s geometrií jak (Holmes a Pavlis) numericky ověřují
- $\Rightarrow$ Jde tedy spíše o jakýsi kompromis mezi sférickou a elipsoidální reprezentací

Byla harmonická analýza u EGM2008 vskutku plně elipsoidální?

- Nevíme, protože žádná referenční příručka (jako tomu bylo u EGM96) nebyla dosud publikována.
- Z pracovní publikace (Holmes a Pavlis) můžeme vyčíst, že zprostředkující rovnice byla vázána na Δg na elipsoidu pomocí harmonické funkce $r_e \Delta g_e$:

$$r_e \Delta g_e(r_e, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{\Delta \sigma} \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^N (n-1) \left(\frac{a}{r_e} \right)^n \sum_{m=-n}^n CS_{nm}^e \bar{I}Y_{nm}$$

- kde $CS_{nm}^e = \{\bar{C}_{nm}^e, \bar{S}_{nm}^e\}$ a $\bar{I}Y_{nm}$ jsou integrály (střední hodnoty) sférických funkcí vzhledem ke geografickému gridu.
- $\Rightarrow$ Tato rovnice pracuje v elipsoidálních souřadnicích $(r_e, \vartheta, \lambda)$
- $\Rightarrow$ Má však strukturu tíhové anomálie ve sférické aproximaci!!!
- $\Rightarrow$ Na elipsoidální data se tak aplikuje forma sférické obs. rovnice
- $\Rightarrow$ Vyřeší patrně problém s geometrií jak (Holmes a Pavlis) numericky ověřují
- $\Rightarrow$ Jde tedy spíše o jakýsi kompromis mezi sférickou a elipsoidální reprezentací

Byla harmonická analýza u EGM2008 vskutku plně elipsoidální?

- Nevíme, protože žádná referenční příručka (jako tomu bylo u EGM96) nebyla dosud publikována.
- Z pracovní publikace (Holmes a Pavlis) můžeme vyčíst, že zprostředkující rovnice byla vázána na Δg na elipsoidu pomocí harmonické funkce $r_e \Delta g_e$:

$$r_e \Delta g_e(r_e, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{\Delta \sigma} \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^N (n-1) \left(\frac{a}{r_e} \right)^n \sum_{m=-n}^n CS_{nm}^e \bar{I}Y_{nm}$$

- kde $CS_{nm}^e = \{\bar{C}_{nm}^e, \bar{S}_{nm}^e\}$ a $\bar{I}Y_{nm}$ jsou integrály (střední hodnoty) sférických funkcí vzhledem ke geografickému gridu.
- $\Rightarrow$ Tato rovnice pracuje v elipsoidálních souřadnicích $(r_e, \vartheta, \lambda)$
- $\Rightarrow$ Má však strukturu tíhové anomálie ve sférické aproximaci!!!
- $\Rightarrow$ Na elipsoidální data se tak aplikuje forma sférické obs. rovnice
- $\Rightarrow$ Vyřeší patrně problém s geometrií jak (Holmes a Pavlis) numericky ověřují
- $\Rightarrow$ Jde tedy spíše o jakýsi kompromis mezi sférickou a elipsoidální reprezentací

Byla harmonická analýza u EGM2008 vskutku plně elipsoidální?

- Nevíme, protože žádná referenční příručka (jako tomu bylo u EGM96) nebyla dosud publikována.
- Z pracovní publikace (Holmes a Pavlis) můžeme vyčíst, že zprostředkující rovnice byla vázána na Δg na elipsoidu pomocí harmonické funkce $r_e \Delta g_e$:

$$r_e \Delta g_e(r_e, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{\Delta \sigma} \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^N (n-1) \left(\frac{a}{r_e} \right)^n \sum_{m=-n}^n CS_{nm}^e \bar{I}Y_{nm}$$

- kde $CS_{nm}^e = \{\bar{C}_{nm}^e, \bar{S}_{nm}^e\}$ a $\bar{I}Y_{nm}$ jsou integrály (střední hodnoty) sférických funkcí vzhledem ke geografickému gridu.
- $\Rightarrow$ Tato rovnice pracuje v elipsoidálních souřadnicích $(r_e, \vartheta, \lambda)$
- $\Rightarrow$ Má však strukturu tíhové anomálie ve sférické aproximaci!!!
- $\Rightarrow$ Na elipsoidální data se tak aplikuje forma sférické obs. rovnice
- $\Rightarrow$ Vyřeší patrně problém s geometrií jak (Holmes a Pavlis) numericky ověřují
- $\Rightarrow$ Jde tedy spíše o jakýsi kompromis mezi sférickou a elipsoidální reprezentací

Byla harmonická analýza u EGM2008 vskutku plně elipsoidální?

- Nevíme, protože žádná referenční příručka (jako tomu bylo u EGM96) nebyla dosud publikována.
- Z pracovní publikace (Holmes a Pavlis) můžeme vyčíst, že zprostředkující rovnice byla vázána na Δg na elipsoidu pomocí harmonické funkce $r_e \Delta g_e$:

$$r_e \Delta g_e(r_e, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{\Delta \sigma} \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^N (n-1) \left(\frac{a}{r_e} \right)^n \sum_{m=-n}^n CS_{nm}^e \bar{I}Y_{nm}$$

- kde $CS_{nm}^e = \{\bar{C}_{nm}^e, \bar{S}_{nm}^e\}$ a $\bar{I}Y_{nm}$ jsou integrály (střední hodnoty) sférických funkcí vzhledem ke geografickému gridu.
- $\Rightarrow$ Tato rovnice pracuje v elipsoidálních souřadnicích $(r_e, \vartheta, \lambda)$
- $\Rightarrow$ Má však strukturu tíhové anomálie ve sférické aproximaci!!!
- $\Rightarrow$ Na elipsoidální data se tak aplikuje forma sférické obs. rovnice
- $\Rightarrow$ Vyřeší patrně problém s geometrií jak (Holmes a Pavlis) numericky ověřují
- $\Rightarrow$ Jde tedy spíše o jakýsi kompromis mezi sférickou a elipsoidální reprezentací

Byla harmonická analýza u EGM2008 vskutku plně elipsoidální?

- Nevíme, protože žádná referenční příručka (jako tomu bylo u EGM96) nebyla dosud publikována.
- Z pracovní publikace (Holmes a Pavlis) můžeme vyčíst, že zprostředkující rovnice byla vázána na Δg na elipsoidu pomocí harmonické funkce $r_e \Delta g_e$:

$$r_e \Delta g_e(r_e, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{\Delta \sigma} \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^N (n-1) \left(\frac{a}{r_e} \right)^n \sum_{m=-n}^n CS_{nm}^e \bar{I}Y_{nm}$$

- kde $CS_{nm}^e = \{\bar{C}_{nm}^e, \bar{S}_{nm}^e\}$ a $\bar{I}Y_{nm}$ jsou integrály (střední hodnoty) sférických funkcí vzhledem ke geografickému gridu.
- $\Rightarrow$ Tato rovnice pracuje v elipsoidálních souřadnicích $(r_e, \vartheta, \lambda)$
- $\Rightarrow$ **Má však strukturu tíhové anomálie ve sférické aproximaci!!!**
- $\Rightarrow$ Na elipsoidální data se tak aplikuje forma sférické obs. rovnice
- $\Rightarrow$ Vyřeší patrně problém s geometrií jak (Holmes a Pavlis) numericky ověřují
- $\Rightarrow$ Jde tedy spíše o jakýsi kompromis mezi sférickou a elipsoidální reprezentací

Byla harmonická analýza u EGM2008 vskutku plně elipsoidální?

- Nevíme, protože žádná referenční příručka (jako tomu bylo u EGM96) nebyla dosud publikována.
- Z pracovní publikace (Holmes a Pavlis) můžeme vyčíst, že zprostředkující rovnice byla vázána na Δg na elipsoidu pomocí harmonické funkce $r_e \Delta g_e$:

$$r_e \Delta g_e(r_e, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{\Delta \sigma} \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^N (n-1) \left(\frac{a}{r_e} \right)^n \sum_{m=-n}^n CS_{nm}^e \bar{I}Y_{nm}$$

- kde $CS_{nm}^e = \{\bar{C}_{nm}^e, \bar{S}_{nm}^e\}$ a $\bar{I}Y_{nm}$ jsou integrály (střední hodnoty) sférických funkcí vzhledem ke geografickému gridu.
- $\Rightarrow$ Tato rovnice pracuje v elipsoidálních souřadnicích $(r_e, \vartheta, \lambda)$
- $\Rightarrow$ Má však strukturu tíhové anomálie ve sférické aproximaci!!!
- $\Rightarrow$ Na elipsoidální data se tak aplikuje forma sférické obs. rovnice
- $\Rightarrow$ Vyřeší patrně problém s geometrií jak (Holmes a Pavlis) numericky ověřují
- $\Rightarrow$ Jde tedy spíše o jakýsi kompromis mezi sférickou a elipsoidální reprezentací

Byla harmonická analýza u EGM2008 vskutku plně elipsoidální?

- Nevíme, protože žádná referenční příručka (jako tomu bylo u EGM96) nebyla dosud publikována.
- Z pracovní publikace (Holmes a Pavlis) můžeme vyčíst, že zprostředkující rovnice byla vázána na Δg na elipsoidu pomocí harmonické funkce $r_e \Delta g_e$:

$$r_e \Delta g_e(r_e, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{\Delta \sigma} \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^N (n-1) \left(\frac{a}{r_e} \right)^n \sum_{m=-n}^n CS_{nm}^e \bar{I}Y_{nm}$$

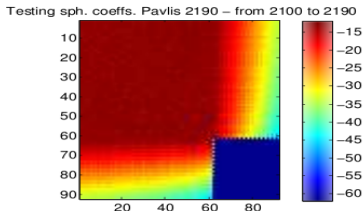
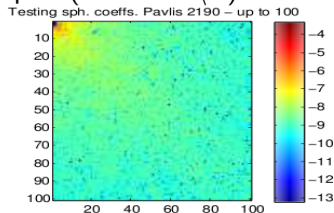
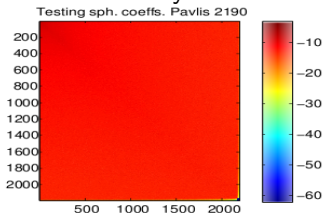
- kde $CS_{nm}^e = \{\bar{C}_{nm}^e, \bar{S}_{nm}^e\}$ a $\bar{I}Y_{nm}$ jsou integrály (střední hodnoty) sférických funkcí vzhledem ke geografickému gridu.
- $\Rightarrow$ Tato rovnice pracuje v elipsoidálních souřadnicích $(r_e, \vartheta, \lambda)$
- $\Rightarrow$ Má však strukturu tíhové anomálie ve sférické aproximaci!!!
- $\Rightarrow$ Na elipsoidální data se tak aplikuje forma sférické obs. rovnice
- $\Rightarrow$ Vyřeší patrně problém s geometrií jak (Holmes a Pavlis) numericky ověřují
- $\Rightarrow$ Jde tedy spíše o jakýsi kompromis mezi sférickou a elipsoidální reprezentací

Byla harmonická analýza u EGM2008 vskutku plně elipsoidální?

- Nevíme, protože žádná referenční příručka (jako tomu bylo u EGM96) nebyla dosud publikována.
- Z pracovní publikace (Holmes a Pavlis) můžeme vyčíst, že zprostředkující rovnice byla vázána na Δg na elipsoidu pomocí harmonické funkce $r_e \Delta g_e$:

$$r_e \Delta g_e(r_e, \vartheta, \lambda) = \frac{1}{\Delta \sigma} \frac{GM}{a} \sum_{n=0}^N (n-1) \left(\frac{a}{r_e} \right)^n \sum_{m=-n}^n CS_{nm}^e \bar{I}Y_{nm}$$

- kde $CS_{nm}^e = \{\bar{C}_{nm}^e, \bar{S}_{nm}^e\}$ a $\bar{I}Y_{nm}$ jsou integrály (střední hodnoty) sférických funkcí vzhledem ke geografickému gridu.
- $\Rightarrow$ Tato rovnice pracuje v elipsoidálních souřadnicích $(r_e, \vartheta, \lambda)$
- $\Rightarrow$ Má však strukturu tíhové anomálie ve sférické aproximaci!!!
- $\Rightarrow$ Na elipsoidální data se tak aplikuje forma sférické obs. rovnice
- $\Rightarrow$ Vyřeší patrně problém s geometrií jak (Holmes a Pavlis) numericky ověřují
- $\Rightarrow$ Jde tedy spíše o jakýsi kompromis mezi sférickou a elipsoidální reprezentací

Parametry EGM2008 pod lupou (formát $C \backslash S$)

Vlevo nahoře - EGM2008 v $\log_{10}$

Vpravo nahoře - EGM2008 v $\log_{10}$ pro $n \in \langle 0, 100 \rangle$

Vlevo dole - EGM2008 v $\log_{10}$ pro $n \in \langle 2100, 2190 \rangle$... zuby ve stupni po konverzi

Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro $n_{max} = 2190$)
- Výpočet $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$ v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace $\Rightarrow$ mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA a aproximaci topografie
- S Hotine-Jekeliho konverzí můžeme aplikovat vhodnější EHA a následně užívat stávající SHS
- Metodický původ jediného v současnosti používaného reprezentanta EHA (EGM2008) je stále nejasný

Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro $n_{max} = 2190$)
- Výpočet $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$ v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace $\Rightarrow$ mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA a aproximaci topografie
- S Hotine-Jekeliho konverzí můžeme aplikovat vhodnější EHA a následně užívat stávající SHS
- Metodický původ jediného v současnosti používaného reprezentanta EHA (EGM2008) je stále nejasný

Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro $n_{max} = 2190$)
- Výpočet $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$ v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace $\Rightarrow$ mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA a aproximaci topografie
- S Hotine-Jekeliho konverzí můžeme aplikovat vhodnější EHA a následně užívat stávající SHS
- Metodický původ jediného v současnosti používaného reprezentanta EHA (EGM2008) je stále nejasný

Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro $n_{max} = 2190$)
- Výpočet $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$ v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace $\Rightarrow$ mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA a aproximaci topografie
- S Hotine-Jekeliho konverzí můžeme aplikovat vhodnější EHA a následně užívat stávající SHS
- Metodický původ jediného v současnosti používaného reprezentanta EHA (EGM2008) je stále nejasný

Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro $n_{max} = 2190$)
- Výpočet $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$ v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace $\Rightarrow$ mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA a aproximaci topografie
- S Hotine-Jekeliho konverzí můžeme aplikovat vhodnější EHA a následně užívat stávající SHS
- Metodický původ jediného v současnosti používaného reprezentanta EHA (EGM2008) je stále nejasný

Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro $n_{max} = 2190$)
- Výpočet $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$ v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace $\Rightarrow$ mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA a aproximaci topografie
- S Hotine-Jekeliho konverzí můžeme aplikovat vhodnější EHA a následně užívat stávající SHS
- Metodický původ jediného v současnosti používaného reprezentanta EHA (EGM2008) je stále nejasný

Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro $n_{max} = 2190$)
- Výpočet $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$ v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace $\Rightarrow$ mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA a aproximaci topografie
- S Hotine-Jekeliho konverzí můžeme aplikovat vhodnější EHA a následně užívat stávající SHS
- Metodický původ jediného v současnosti používaného reprezentanta EHA (EGM2008) je stále nejasný

Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro $n_{max} = 2190$)
- Výpočet $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$ v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace $\Rightarrow$ mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA a aproximaci topografie
- S Hotine-Jekeliho konverzí můžeme aplikovat vhodnější EHA a následně užívat stávající SHS
- Metodický původ jediného v současnosti používaného reprezentanta EHA (EGM2008) je stále nejasný

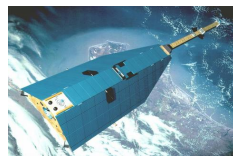
Výpočet elipsoidálních funkcí Jekeliho renormalizací

- Založeno na hypergeometrické definici $\bar{Q}_{n,m} \Rightarrow \bar{S}_{n,m}$
- „2 mouchy...“ - funkce pro počítání s EHK a současně pro výpočet konverze koeficientů
- Velmi přesné pro optimalizované funkce (nejhůře 8 platných cifer pro $n_{max} = 2190$)
- Výpočet $\bar{S}_{n,m}^0, \bar{S}_{n,m}^1, \bar{S}_{n,m}^3$ v řádu vteřin s (1.6GHz, 1CPU, Matlab).
- Hypergeometrická formulace $\Rightarrow$ mnoho dalších možností pro optimalizaci.
- Význam EH zejména při EHA a aproximaci topografie
- S Hotine-Jekeliho konverzí můžeme aplikovat vhodnější EHA a následně užívat stávající SHS
- Metodický původ jediného v současnosti používaného reprezentanta EHA (EGM2008) je stále nejasný

B) Koncept lineární modelu pro sférickou harmonickou analýzu MNČ

Charakteristika obecnějšího modelu SHA

- Možnost zpracování heterogenních dat (CHAMP, GRACE, GOCE, gravimetrie?)
- Rozdíl potenciálu, dráha družice $\Rightarrow$ vektor gravitačního zrychlení, gradientometrie $\Rightarrow V, V_i, V_{ij}$
- Nutno uvážit, že tíhová data mají různou orientaci v prostoru
- „Méně je více“ - minimalizace manipulace s originálními daty
- Hardwarové omezení - velké soustavy rovnic,
 $n_{max} \leq 360$



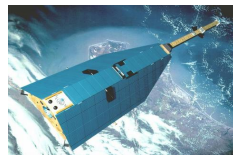
Rovnice pozorování pro lineární model

$$\underbrace{V_i(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_i^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T$$



Charakteristika obecnějšího modelu SHA

- Možnost zpracování heterogenních dat (CHAMP, GRACE, GOCE, gravimetrie?)
- Rozdíl potenciálu, dráha družice $\Rightarrow$ vektor gravitačního zrychlení, gradientometrie $\Rightarrow V, V_i, V_{ij}$
- Nutno uvážit, že tíhová data mají různou orientaci v prostoru
- „Méně je více“ - minimalizace manipulace s originálními daty
- Hardwarové omezení - velké soustavy rovnic,
 $n_{max} \leq 360$



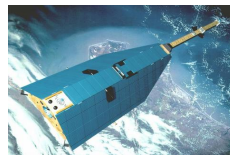
Rovnice pozorování pro lineární model

$$\underbrace{V_i(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_i^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T$$



Charakteristika obecnějšího modelu SHA

- Možnost zpracování heterogenních dat (CHAMP, GRACE, GOCE, gravimetrie?)
- Rozdíl potenciálu, dráha družice $\Rightarrow$ vektor gravitačního zrychlení, gradientometrie $\Rightarrow V, V_i, V_{ij}$
- Nutno uvážit, že tíhová data mají různou orientaci v prostoru
- „Méně je více“ - minimalizace manipulace s originálními daty
- Hardwarové omezení - velké soustavy rovnic,
 $n_{max} \leq 360$



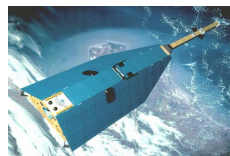
Rovnice pozorování pro lineární model

$$\underbrace{V_i(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_{ij}^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T$$



Charakteristika obecnějšího modelu SHA

- Možnost zpracování heterogenních dat (CHAMP, GRACE, GOCE, gravimetrie?)
- Rozdíl potenciálu, dráha družice $\Rightarrow$ vektor gravitačního zrychlení, gradientometrie $\Rightarrow V, V_i, V_{ij}$
- Nutno uvážit, že tíhová data mají různou orientaci v prostoru
- „Méně je více“ - minimalizace manipulace s originálními daty
- Hardwarové omezení - velké soustavy rovnic,
 $n_{max} \leq 360$



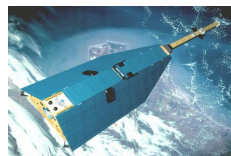
Rovnice pozorování pro lineární model

$$\underbrace{V_i(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_{ij}^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T$$



Charakteristika obecnějšího modelu SHA

- Možnost zpracování heterogenních dat (CHAMP, GRACE, GOCE, gravimetrie?)
- Rozdíl potenciálu, dráha družice $\Rightarrow$ vektor gravitačního zrychlení, gradientometrie $\Rightarrow V, V_i, V_{ij}$
- Nutno uvážit, že tíhová data mají různou orientaci v prostoru
- „Méně je více“ - minimalizace manipulace s originálními daty
- Hardwarové omezení - velké soustavy rovnic,
 $n_{max} \leq 360$



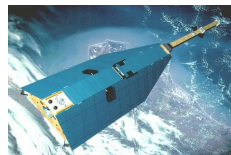
Rovnice pozorování pro lineární model

$$\underbrace{V_i(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_{ij}^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T$$



Charakteristika obecnějšího modelu SHA

- Možnost zpracování heterogenních dat (CHAMP, GRACE, GOCE, gravimetrie?)
- Rozdíl potenciálu, dráha družice $\Rightarrow$ vektor gravitačního zrychlení, gradientometrie $\Rightarrow V, V_i, V_{ij}$
- Nutno uvážit, že tíhová data mají různou orientaci v prostoru
- „Méně je více“ - minimalizace manipulace s originálními daty
- Hardwarové omezení - velké soustavy rovnic,
 $n_{max} \leq 360$



Rovnice pozorování pro lineární model

$$\underbrace{V_i(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} = \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_i^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T$$



Hotineho rovnice

Opět řešíme $\Delta V = 0$, ale ve sfér. souřadnicích $\{r, \theta, \lambda\}$. Pak standardně dostáváme:

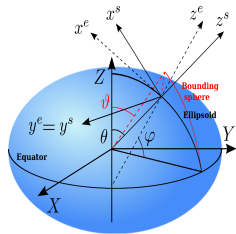
$$V = \frac{GM}{a} \sum_{n,m}^{\infty,n} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} (\bar{C}_{n,m} \cos m\lambda + \bar{S}_{n,m} \sin m\lambda) \bar{P}_{n,m},$$

kde $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ jsou hledané sférické Stokesovy parametry. Pro kartézské derivace V máme obdobné vztahy jako u elipsoidické reprezentace, my zde teď použijeme ty, které odvodil Martin Hotine v soustavě EFF (také Cunningham):

$$V_i = \frac{GM}{a^2} \sum_{n,m}^{\infty,n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} (\bar{C}_{n+1,m}^i \cos m\lambda + \bar{S}_{n+1,m}^i \sin m\lambda) \bar{P}_{n+1,m}$$

$$V_{ij} = \frac{GM}{a^3} \sum_{n,m}^{\infty,n+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} (\bar{C}_{n+2,m}^{ij} \cos m\lambda + \bar{S}_{n+2,m}^{ij} \sin m\lambda) \bar{P}_{n+2,m}$$

Parametry $\bar{C}_{n+1,m}^i, \bar{S}_{n+1,m}^i, \bar{C}_{n+2,m}^{ij}, \bar{S}_{n+2,m}^{ij}$ nejsou „klasické“ Stokesovy parametry, ale jejich určité lineární kombinace, tzv. Hotineho koeficienty/parametry.



EFF - $\{X, Y, Z\}$

LNOFs - $\{x_s, y_s, z_s\}$

LNOFe - $\{x_e, y_e, z_e\}$

Hotineho rovnice

Např. Hotineho koeficienty pro V_{xx} vypadají takto:

$$m = 0 \begin{cases} \bar{C}_{n+2,0}^{xx} = -\frac{1}{2}t_0\bar{C}_{n,0} + \frac{1}{4}t_2\bar{C}_{n,0+2} \\ \bar{S}_{n+2,0}^{xx} = 0 \end{cases}$$

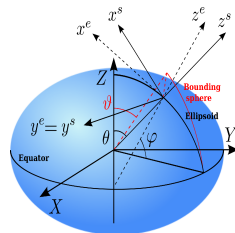
$$m = 1 \begin{cases} \bar{C}_{n+2,1}^{xx} = -\frac{3}{4}t_0\bar{C}_{n,1} + \frac{1}{4}t_2\bar{C}_{n,1+2} \\ \bar{S}_{n+2,1}^{xx} = -\frac{1}{4}t_0\bar{S}_{n,1} + \frac{1}{4}t_2\bar{S}_{n,1+2} \end{cases}$$

$$m = 2 \begin{cases} \bar{C}_{n+2,2}^{xx} = \frac{1}{4}t_{m2}\bar{C}_{n,2-2} - \frac{1}{2}t_0\bar{C}_{n,2} + \frac{1}{4}t_2\bar{C}_{n,2+2} \\ \bar{S}_{n+2,2}^{xx} = -\frac{1}{2}t_0\bar{S}_{n,2} + \frac{1}{4}t_2\bar{S}_{n,2+2} \end{cases}$$

$$m \geq 3 \begin{cases} \bar{C}_{n+2,m}^{xx} = \frac{1}{4}t_{m2}\bar{C}_{n,m-2} - \frac{1}{2}t_0\bar{C}_{n,m} + \frac{1}{4}t_2\bar{C}_{n,m+2} \\ \bar{S}_{n+2,m}^{xx} = \frac{1}{4}t_{m2}\bar{S}_{n,m-2} - \frac{1}{2}t_0\bar{S}_{n,m} + \frac{1}{4}t_2\bar{S}_{n,m+2} \end{cases}$$

kde t_0, t_{m2}, t_2 jsou funkcí pouze n, m ($\sim$ normalizační faktory).

$\Rightarrow$ Hotineho koeficienty jsou lineární funkcí Stokesových (geopotenciálních) parametrů



EFF - $\{X, Y, Z\}$

LNOFs - $\{x_s, y_s, z_s\}$

LNOFe - $\{x_e, y_e, z_e\}$

Rotované observační rovnice

Vyjdeme ze vztahu pro vektor gravitačního zrychlení či Eötvösův tensor v libovolné referenční soustavě:

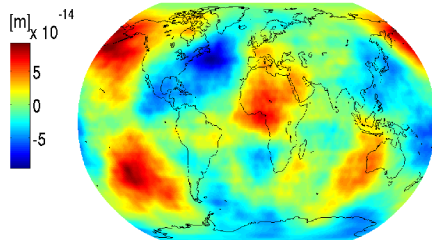
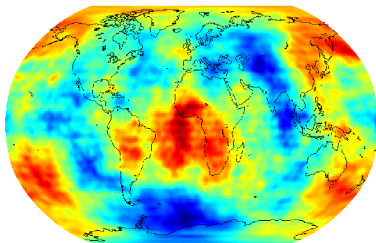
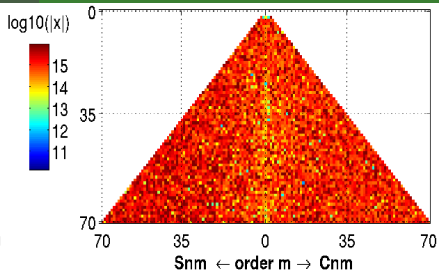
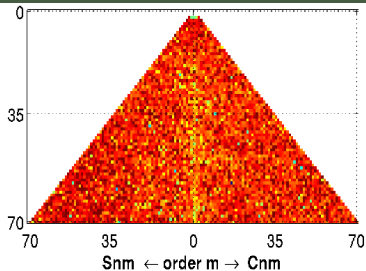
$$\begin{aligned} V_i(r, \theta, \lambda) &= R V_i^{EFF}(r, \theta, \lambda) \\ \underbrace{V_{ij}(r, \theta, \lambda)}_{\text{měření}} &= \underbrace{R}_{\text{orientace}} \underbrace{V_{ij}^{EFF}(r, \theta, \lambda)}_{\text{rovnice+poloha}} R^T \end{aligned}$$

Dosazením z Hotineho rovnic získáme rotované observační rovnice:

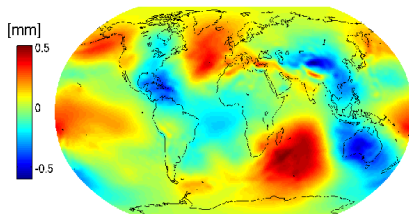
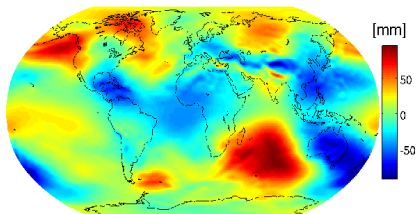
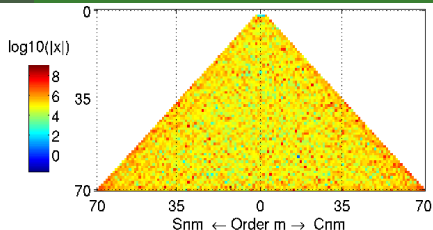
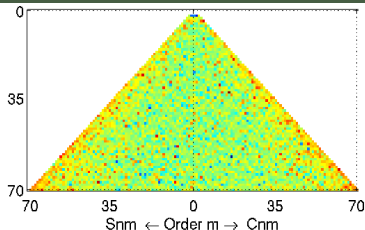
$$V_i = \frac{GM}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+1} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+2} \bar{P}_{n+1,m} \left[\cos m\lambda \left(r_1^i \bar{C}_{n+1,m}^x + r_2^i \bar{C}_{n+1,m}^y + r_3^i \bar{C}_{n+1,m}^z \right) + \sin m\lambda \left(r_1^i \bar{S}_{n+1,m}^x + r_2^i \bar{S}_{n+1,m}^y + r_3^i \bar{S}_{n+1,m}^z \right) \right],$$

$$\begin{aligned} V_{ij} = \frac{GM}{a^3} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+2} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+3} \bar{P}_{n+2,m} &\left[\cos m\lambda \left(s_1^{ij} \bar{C}_{n+2,m}^{xx} + s_2^{ij} \bar{C}_{n+2,m}^{yy} + s_3^{ij} \bar{C}_{n+2,m}^{zz} \right) \right. \\ &+ s_4^{ij} \bar{C}_{n+2,m}^{xy} + s_5^{ij} \bar{C}_{n+2,m}^{xz} + s_6^{ij} \bar{C}_{n+2,m}^{yz} + \sin m\lambda \left(s_1^{ij} \bar{S}_{n+2,m}^{xx} + s_2^{ij} \bar{S}_{n+2,m}^{yy} \right. \\ &\left. \left. + s_3^{ij} \bar{S}_{n+2,m}^{zz} + s_4^{ij} \bar{S}_{n+2,m}^{xy} + s_5^{ij} \bar{S}_{n+2,m}^{xz} + s_6^{ij} \bar{S}_{n+2,m}^{yz} \right) \right]. \end{aligned}$$

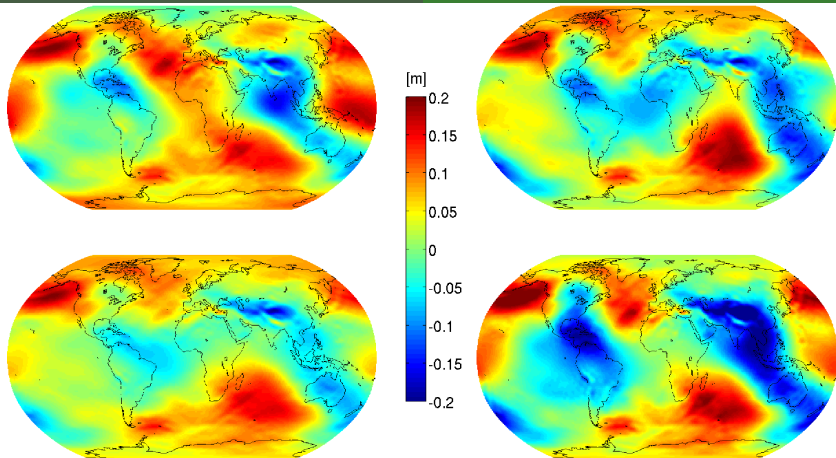
⇒ Zvýší se n_{max} rozvoje, žádné derivace $\bar{P}_{n,m}$ a jednoduchá algebraická struktura



Ověření konceptu pro T_z, T_{zz} , EGM2008, $n_{max} = 70$ (90 tisíc měření, 5000 neznámých)



Test SHA pomocí elipsoidické korekce $\epsilon_h \approx e^2 \sin \varphi_s \cos \varphi_s \frac{1}{r} T_\varphi$. Vlevo $\text{SHA}(\delta g^e = T_z^e)$, vpravo $\text{SHA}(\delta g^s = T_z^e + \epsilon_h)$, EGM2008, $n_{max} = 70$ (90 tisíc měření, 5000 neznámých)



Výpočet vlivu normály na výšku geoidu pro různé kombinace dat (EGM2008, $N = 70$) z EON = SHS ($\text{SHA}^e(l) - \text{SHA}^s(l)$). Horní vlevo $l = \{T_x^e, T_y^e\}$, horní vpravo $l = \{T_{zz}^e\}$, dolní vlevo $l = \{T_{xx}^e, T_{yy}^e\}$ a dolní vpravo $l = \{T_{xy}^e, T_{xz}^e, T_{yz}^e\}$.

Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice $\Rightarrow$ rychlost
- Heterogenní data V_i, V_{ij} v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace $\bar{P}_{n,m}$... rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty = lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlepy v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro V_i, V_{ij} (jen některá vydání mají erratu)

Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice $\Rightarrow$ rychlost
- Heterogenní data V_i, V_{ij} v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace $\bar{P}_{n,m}$... rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty = lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlepy v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro V_i, V_{ij} (jen některá vydání mají erratu)

Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice $\Rightarrow$ rychlost
- Heterogenní data V_i, V_{ij} v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace $\bar{P}_{n,m}$... rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty = lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlady v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro V_i, V_{ij} (jen některá vydání mají erratu)

Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice $\Rightarrow$ rychlost
- Heterogenní data V_i, V_{ij} v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace $\bar{P}_{n,m}$... rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty = lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlady v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro V_i, V_{ij} (jen některá vydání mají erratu)

Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice $\Rightarrow$ rychlost
- Heterogenní data V_i, V_{ij} v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace $\bar{P}_{n,m}$... rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty = lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlady v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro V_i, V_{ij} (jen některá vydání mají erratu)

Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice $\Rightarrow$ rychlost
- Heterogenní data V_i, V_{ij} v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace $\bar{P}_{n,m}$... rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty = lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlady v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro V_i, V_{ij} (jen některá vydání mají erratu)

Přímá SHA s Hotineho rovnicemi

- Hotineho rovnice pracují v systému EFF
- Algebraicky jednoduché rotované observační rovnice $\Rightarrow$ rychlost
- Heterogenní data V_i, V_{ij} v libovolné orientaci
- Nepotřebuje derivace $\bar{P}_{n,m}$... rychlost, menší vliv zaokrouhlování
- Hotine zavádí tzv. Hotineho koeficienty = lineární kombinace Stokesových parametrů
- Pozor na překlady v Hotineho „Mathematical Geodesy“ ve vztazích pro V_i, V_{ij} (jen některá vydání mají erratu)

Elipsoidální reprezentace a Jekeliho renormalizace

- Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1964). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York.
- Gleason, D. M. (1988). Comparing ellipsoidal corrections to the transformation between the geopotential's spherical and ellipsoidal spectrums. Manuscripta Geodaetica, 13:114–129.
- Hobson, E. W. (1931). The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Cambridge, Great Britain.
- Holmes, S. A. and Pavlis, N. K. (2006). Some aspects of harmonic analysis of data gridded on the ellipsoid.
- Jekeli, C. (1988). The exact transformation between ellipsoidal and spherical expansions. Manuscripta Geodaetica, 13:106–113.
- Maus, S. (2010). An ellipsoidal harmonic representation of Earth's lithospheric magnetic field to degree and order 720. Geochem. Geophys. Geosyst., 11.
- Nesvadba, O. (2009). Numerical problems in evaluating high degree and order associated Legendre functions, EGU.
- Sona, G. (1995). Numerical problems in the computation of ellipsoidal harmonics. Journal of Geodesy, 70:117–126. 10.1007/BF00863423.

Hotineho rovnice

- Bettadpur, S. V. (1992). Spherical harmonic synthesis and least squares computations in satellite gravity gradiometry. Journal of Geodesy, 66:261–271. 10.1007/BF02033186.
- Bettadpur, S. V. (1995). Hotine's geopotential formulation: revisited. Journal of Geodesy, 69:135–142. 10.1007/BF00815482.
- Hotine, M. (1969). Mathematical geodesy. ESSA, U.S. Department of Commerce.
- Jekeli, C. (1981). The downward continuation to the Earth's surface of truncated spherical and ellipsoidal harmonic series of the gravity and height anomalies. Technical Report 323, Ohio State University.
- Petrovskaya, M. and Vershkov, A. (2009). Construction of spherical harmonic series for the potential derivatives of arbitrary orders in the geocentric Earth-fixed reference frame. Journal of Geodesy, 84:165–178. 10.1007/s00190-009-0353-y.
- Rapp, R.-H. (1998). Past and future developments in geopotential modeling. In Forsberg, R., Feissel, M., and Dietrich, R., editors, Geodesy on the Move, pages 58–78. Springer-Verlag, Berlin New York.

Děkuji za pozornost!